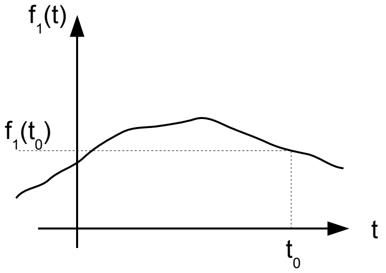
Signale und Systeme

Andy Dunkel

1 Signale

Deterministische Signale	• an jedem Zeitpunkt an dem das Signal existiert, kann es ein deutig einem Zahlenwert zugeordnet werden • mathematisch beschreibbar z.B. $x(t)=A\cdot\sin(\omega_0 t)$
Stochastische Signale	• kann nicht vorhergesagt werden, nicht durch Formel beschreibbar, z.b. Sprachsignal
Zeit- und wertkontinuierliche Signale	• stückweise stetige Funktion • beiden Achsen ist zu jedem Zeitpunkt ein eindeutiger Wert zugewiesen 

2 Allgemeine Zusammenhänge

$\sin(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})$

$\omega=2\pi\cdot f$

2.1 Elementarsignale

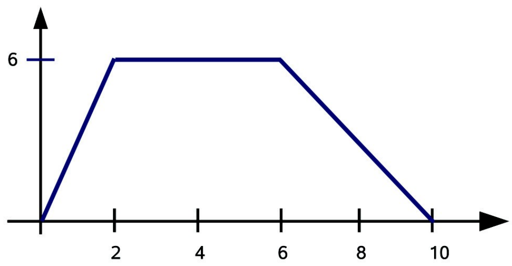
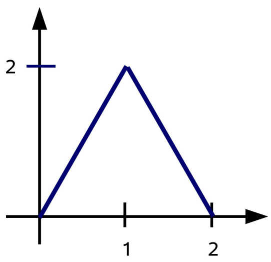
2.1.1 Zerlegung Funktion gerade/ungerade Anteile

- jedes Signal y(t) lässt sich in geraden und ungeraden Teil zerlegen
- gerade: x(t) = x(-t) z.B.: $x(t) = \cos(w_o t)$
- ungerade: x(t) = -x(-t) z.B.: $x(t) = \sin(w_o t)$
- Zerlegung: $y(t) = y_g(t) + y_u(t)$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} y_g(t) &= \frac{1}{2}\cdot[\,y(t)+y(-t)] = y_g(-t) \\ y_u(t) &= \frac{1}{2}\cdot[\,y(t)-y(-t)] = -\,y_u(-t) \end{aligned}}$$

Beispiel: $y(t)=x^2+x-3$	$y_g(t)=\frac{1}{2}[x^2+x-3+(-x)^2-x-3]$ $=\frac{1}{2}[x^2+x-3+x^2-x+3]=\frac{1}{2}[2x^2-6]=\underline{\underline{x^2-3}}$ $y_g(t)=\frac{1}{2}[x^2+x-3-[(-x)^2-x-3]]$ $=\frac{1}{2}[x^2+x-3-x^2+x-3]=\frac{1}{2}[2x]=\underline{\underline{x}}$

2.1.2 Beispiele für zusammengesetzte Funktionen

	$f(t)=3r(t)-3r(t-2)-1{,}5r(t-6)+1{,}5r(t-10)$ Steigung in erstem Abschnitt: $\frac{6}{2}=3$ Steigung in letztem Abschnitt: $\frac{6}{(10-6)}=1{,}5$ negativ da abfallend!
	$f(t)=2r(t)-4r(t-1)+2r(t-2)$

2.1.3 Linearität von Systemen

System ist linear, wenn Verdoppelung des Eingangssignals zu Verdoppelung des Ausgangssignals führt (gilt für jeden Faktor) folgende **2 Eigenschaften müssen erfüllt sein**:

- Homogenität: $c \cdot x(t) \rightarrow c \cdot y(t)$
- Additivität: $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$

Beispiel 1: $y(t) = 2 \cdot x(t)$ linear?	
Prüfung Homogenität:	$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 2 \cdot x_1(t)$ x_2(t) sei 2 mal x_1(t): $x_2(t) = 2 \cdot x_1(t)$ Ausgangssignal: $y_2(t) = 2 \cdot x_2(t) = 2 \cdot (2 \cdot x_1(t)) = \underline{4 \cdot x_1(t)}$
Man muss zum selben Ergebnis kommen, wenn man einfach das Ausgangssignal verdoppelt:	$y_2(t) = 2 \cdot y_1(t) = 2 \cdot 2 \cdot x_1(t) = \underline{4 \cdot x_1(t)}$ → erfüllt
Prüfung Additivität:	$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 2 \cdot x_1(t)$; $x_2(t) \rightarrow y_2(t) = 2 \cdot x_2(t)$
Beide Signale addiert ergibt Signal x_3(t):	$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ Wird $x_3(t)$ in das System eingespeist, ergibt sich: $y_3(t) = 2 \cdot (2 \cdot x_1(t) + 2 \cdot x_2(t)) = \underline{4 \cdot x_1(t) + 4 \cdot x_2(t)}$
Dies muss gleich sein, wie die Summe der beiden Einzelausgangssignale:	$y_3(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2 \cdot 2 x_1(t) + 2 \cdot 2 \cdot x_2(t) = \underline{4 \cdot x_1(t) + 4 \cdot x_2(t)}$ **→ auch erfüllt, d.h. System ist LINEAR!**

Beispiel 2: $y(t) = 2x^2(t)$ linear?	
Prüfung Homogenität:	$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 2(x_1(t))^2$ x_2(t) sei 2 mal x_1(t): $x_2(t) = 2 \cdot x_1(t)$ Ausgangssignal: $y_t(t) = 2(x_2(t))^2 = 2(2 \cdot x_1(t))^2 = 2 \cdot 2^2 \cdot (x_1(t))^2 = \underline{\underline{8 \cdot (x_1(t))^2}}$
Gleiches Ergebnis bei Verdoppelung des Ausgangssignals?	$y_2(t) = 2 \cdot y_1(t) \rightarrow y_2(t) = 2 \cdot (2(x_1(t))^2) = \underline{\underline{4(x_1(t))^2}}$ **→ beide Ergebnisse sind unterschiedlich, daher nicht linear!**

2.1.4 Zeitinvarianz

Ein System heißt zeitinvariant, wenn eine Zeitverschiebung (Verzögerung oder Vorlauf) im Eingabesignal x(t) die gleiche Zeitverschiebung im Ausgabesignal y(t) verursacht, d.h. $x(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau)$. Am Ausgang muss die gleiche Funktion erscheinen.

- $y(t) = R \cdot x(t)$ → zeitinvariant
- $y(t) = t \cdot x(t)$ → zeitvariant

2.1.5 Kausalität

- kein Ausgangssignal, bevor Eingangssignal anliegt $x(t) = 0$ für $t \leq t_0 \rightarrow y(t) = 0$ für $t \leq t_0$
- kausal: $y(t) = R \cdot x(t)$
- nicht kausal: $y(t) = x(-t)$

2.1.6 Stabilität

- Reaktion auf ein endliches Eingangssignal ist ein endliches Ausgangssignal
- BIBO – bounded input, bounded output
- $|x(t)| < M < \infty \rightarrow |y(t)| < N < \infty$

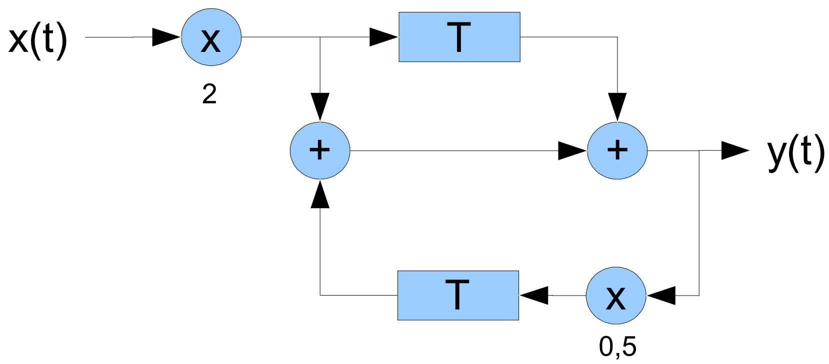
Beispiel: $y(t) = 2 \cdot x^2(t)$ stabil?	System ist stabil, da Ausgangssignal stets beschränkt bleibt: $x(t) = M \rightarrow y(t) = 2 \cdot M^2 < \infty$
Beispiel: $y(t) = e^{0,1 \cdot t} \cdot x^2(t)$ stabil?	nicht stabil, da Faktor $e^{0,1 \cdot t}$ zeitlich unbegrenzt wächst

2.1.7 Systeme mit und ohne Speicher

- System ist speicherfrei, wenn Ausgang y(t) zu jedem Zeitpunkt t = t_0 nur vom Eingang x(t) abhängt
- **Beispiele:**
  - $y(t) = 3\mathrm{x}^2(t)$ → speicherfrei, y(t) hängt nur von x(t) ab
  - $y(t) = 2\mathrm{x}(t) + 3\mathrm{x}(t - \tau)$ ist nicht speicherfrei

3 Zeitdiskrete Systeme

3.1 Umsetzung zeitdiskretes System in Differenzengleichung



Umsetzung in Differenzengleichung:	$y(k) = 2\mathrm{x}(k) + 2\mathrm{x}(k-1) + 0{,}5\, y(k-1)$ Verzögerung wird mit (k-1) umgesetzt, Signale die vom Ausgang zurückkommen mit y(k), so werden alle Signale nacheinander in die Formel eingesetzt.

3.2 Berechnung der Übertragungsfunktion zeitdiskreter Systeme

	$y(k)=2x(k)+2x(k-1)+0{,}5\,y(k-1)$
y(k) Terme und x(k) Terme werden auf jeweils eine Seite gebracht	$y(k)-0{,}5\,y(k-1)=2x(k)+2x(k-1)$
für y(t) → $G(e^{jwT})\cdot e^{jkwT}$ einsetzen für x(t) → e^{jkwT} einsetzen bei Zeitverschiebung $e^{j(k-1)wT}$	$G(e^{jwT})\cdot e^{jkwT}-0{,}5\cdot G(e^{jwT})\cdot e^{j(k-1)wT}=2\cdot e^{jkwT}+2\cdot e^{j(k-1)wT}$ mit e^{-jkwT} multiplizieren $G(e^{jwT})\cdot e^{jkwT-jwkT}-0{,}5\cdot G(e^{jwT})\cdot e^{jkwT-jwT-jwkT}=2\cdot e^{jkwT-jwkT}+2\cdot e^{jkwT-jwkT-jwT}$ $G(e^{jwT})-0{,}5\cdot G(e^{jwT})\cdot e^{-jwT}=2+2\cdot e^{-jwT}$ $G(e^{jwT})\cdot[1-0{,}5\,e^{-jwT}]=2+2\cdot e^{-jwT}$ umformen: $G(e^{jwT})=2\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{e^{jwT}}}{1-\frac{1}{2e^{jwT}}}\right) \quad / \quad \cdot e^{jwT}$ $\underline{\underline{G(e^{jwT})=2\cdot\left(\frac{e^{jwT}+1}{e^{jwT}-\frac{1}{2}}\right)}}$

3.2.1 Berechnung eines Ausgangssignals mit der Übertragungsfunktion

Übertragungsfunktion und Eingangssignal	$G(e^{j\Omega})=\frac{1}{1+\frac{3}{4}e^{-j\Omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}$ $\qquad x(k)=2\cdot\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $y(k)=\lvert G(e^{j\pi})\rvert\cdot 2\cdot\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-b(\pi)\right)$ (b = Phasengang)
Betrag der Übertragungsfunktion bilden	$G(e^{j\pi})=\frac{1}{1+\frac{3}{4}e^{-j\pi}+\frac{1}{8}e^{-2j\pi}}$ // $e^{-j\pi}=-1$ $\lvert G(e^{j\omega})\rvert=\frac{1}{1-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}=\underline{\frac{8}{3}}$
Phasengang	$b(\pi)=-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(jw)\}}{\mathrm{Re}\{G(jw)\}}\right)$ // hier = 0
Ausgangssignal	$y(k)=\frac{8}{3}\cdot 2\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 1

3.3 Faltung

- durch Faltung des Eingangssignals x(t) mit der Impulsantwort g(t) des Systems, erhält man die Ausgangsfunktion y(t):

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau = f(t)*g(t)$$

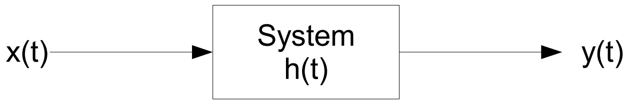


Abbildung 1: Systemantwort durch Faltung

- mit der Faltung lässt sich so das Ausgangssignal eines beliebigen Systems berechnen, sofern die Impulsantwort bekannt ist
- unabhängige Variable t wird durch τ ersetzt, $x(t)$ und $h(t)$ werden so zu $x(\tau)$ und $h(\tau)$
- nächster Schritt ist das Spiegeln (Falten) der der Impulsantwort an der y-Achse so dass sie zu $h(-\tau)$ wird
- nun wird die gespiegelte Funktion an die Stelle t verschoben: $h(t-\tau)$
- beide Funktionen werden nun multipliziert und anschließend über den gesamten Wertebereich integriert

3.4 Eigenschaften der Faltung

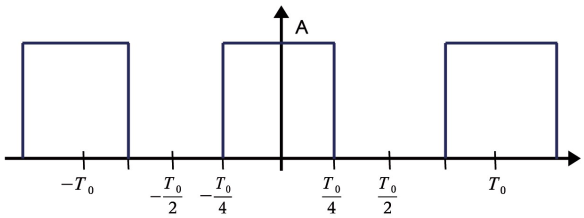
- Kommutativität:
  Die Faktoren der Faltung dürfen vertauscht werden: $f*g=g*f$
- Assoziativität:
  Sind 3 Funktionen zu falten, faltet man die ersten beiden und faltet das Ergebnis mit der dritten Funktion: $(f*g)*h=f*g*h$
- Distributivität: $f*(g+h)=f*g+f*h$
- Faltung mit Dirac-Impuls: $x(t)*\delta(t)=x(t)$ mit Zeitverschiebung: $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$

3.5 Beispiel Faltung

$x(t)=\cos(w_o t)$ $g(t)=\delta(t)-\delta(t-2)$ **gesucht:** Ausgangssignal y(t) durch Faltung	$y(t)=x(t)*g(t)$
Faltungsintegral aufstellen t wird durch τ ersetzt, g(t) wird gespiegelt und nach t verschoben	$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$ $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_0\tau)\cdot[\delta(t-\tau)-\delta(t-\tau-2)]\,d\tau$
- τ kann zu +τ geändert werden, da Dirac keine Breite hat	$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_0\tau)\cdot\delta(t+\tau)-\int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_0\tau)\cdot\delta(t+\tau-2)\,d\tau$
Ausblendeigenschaft des Diracimpuls	$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_0 t)\cdot\delta(t+\tau)-\int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_0(t-2))\cdot\delta(t+\tau-2)\,d\tau$
Kosinus hängt nicht mehr von τ, aus Integral ziehen	$y(t)=\cos(w_0 t)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+\tau)-\cos(w_0(t-2))\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+\tau-2)\,d\tau$
Dirac integriert = Sprungfunktion, 1 bei undendlich 0 bei Minus unendlich, Integral = 1	$\underline{\underline{y(t)=\cos(w_0 t)-\cos(w_0(t-2))}}$

4 Fourier-Transformation

4.1 Fourier-Reihen



Beispiel Signal

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu \cdot e^{j\nu\omega_0 t} = C_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} |C_\nu| \cdot \cos(\nu\,\omega_0 t + \phi_\nu)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \rightarrow \text{Grundfrequenz}$$

Fourierkoeffizienten:

$$C_\nu = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cdot e^{-j\nu\omega_0 t}\, dt \qquad C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\, dt$$

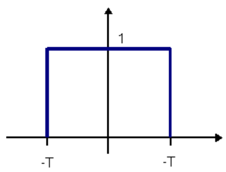
Beispiel	
Aufstellen der Gleichung für Fourierkoeffizienten:	$C_\nu = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} A \cdot e^{-j\nu\omega_0 t}\, dt$ Funktion wird Stückweise integriert. Hier der Bereich in dem das Rechtecksignal integriert, im Bereich in welchem das Integral 0 ist, müsste man normal ein zweites Integral addieren, ist aber hier nicht nötig da 0.
Lösen des Integrals:	$C_\nu = \frac{A}{T_0} \left[\frac{1}{-j\omega_0 \nu} e^{-j\nu\omega_0 t} \right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}}$
Einsetzen der Grenzen und ausrechnen	$C_\nu = \frac{A}{T_0} \cdot \frac{1}{j\omega_0 \nu} \left[-e^{-j\nu\omega_0 \frac{T_0}{4}} + e^{j\nu\omega_0 \frac{T_0}{4}} \right] \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ $C_\nu = \frac{A}{T_0} \cdot \frac{1}{\omega_0 \nu} \cdot \frac{1}{j} \cdot \left[-e^{-j\nu\frac{\pi}{2}} + e^{j\nu\frac{\pi}{2}} \right] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{j} \cdot \left[-e^{-j\nu\frac{\pi}{2}} + e^{j\nu\frac{\pi}{2}} \right] = 2 \cdot \sin(\nu \frac{\pi}{2})$ $C_\nu = \frac{A}{T_0} \cdot \frac{1}{\omega_0 \nu} \left[2 \cdot \sin(\nu \frac{\pi}{2}) \right] \quad \rightarrow \quad T_0 \cdot w_0 = 2\pi$ $C_\nu = \frac{A}{2\pi\nu} \left[2 \cdot \sin(\nu \frac{\pi}{2}) \right] = \underline{\underline{\frac{A \cdot \sin(\nu \frac{\pi}{2})}{\pi\nu}}}$
Berechnung von C_0	$C_0 = \frac{A}{T_0} \cdot [t]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} = \frac{A}{T_0} \cdot \left[\frac{T_o}{4} + \frac{T_0}{4} \right] = \underline{\underline{\frac{A}{2}}}$

Ist eine Funktion gerade oder ungeraden, lässt sich C_ν leichter berechnen.	$C_\nu = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f_g(t) \cdot \cos(\nu\,\omega_0 t)\, dt + j \left(-\frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f_u(t) \cdot \sin(\nu\omega_0 t)\, dt \right)$ gerader / ungerader Anteil

Beispielfunktion ist gerade	$C_\nu=\frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{4}} A\cdot\cos(\nu\,\omega_0 t)\,dt=\frac{2A}{T_0}\left[\frac{1}{\nu\,\omega_0}\cdot\sin(\nu\,\omega_0 t)\right]_0^{\frac{T_0}{4}}$ $C_\nu=\frac{2A}{T_0\nu\,\omega_0}\left[\sin(\nu\,\omega_0 t)\right]_0^{\frac{T_0}{4}} \;\rightarrow\; C_\nu=\frac{2A}{T_0 2\pi}\left[\sin(\nu\,\omega_0\frac{T_0}{4})\right]$ $C_\nu=\frac{A}{T_0\pi}\left[\sin(\nu\frac{\pi}{2})\right]$

4.2 Fourier-Transformation

Transformation in den Bildbereich:	Rücktransformation in den Zeitbereich:
$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$
Bei nur geraden / ungeraden Funktionen ist eine Aufteilung sinnvoll: $F(j\omega)=2\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f_g(t)\cdot\cos(\omega t)\,dt+j\left[-2\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f_u(t)\cdot\sin(\omega t)\,dt\right]$ gerader | ungerader	

Beispiel Rechteckfunktion:	 Gerade Funktion → gerade Funktion $F(j\omega)=2\cdot\int_0^{T} 1\cdot\cos(\omega t)\,dt=\frac{2}{\omega}\cdot\sin(\omega T)$

4.2.1 Fourier statt Faltung

Faltung im Zeitbereich = Multiplikation im Frequenzbereich	Ausgangssignal = Eingangssignal gefaltet mit Impulsantwort: $y(t)=x(t)*g(t)\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$ Im Bildbereich: $\boxed{Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot G(j\omega)}$

4.2.2 Zeitverschiebung

Ist Funktion im Zeitbereich verschoben, wird im Frequenzbereich mit e-Funktion Multipliziert	$f(t-t_0)\leftarrow\rightarrow F(j\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$ Beispiele: $f(t)=s(t-2)\leftarrow\rightarrow F(j\omega)=(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega})\cdot e^{-j\omega\cdot 2}$ $f(t)=s(t+2)\leftarrow\rightarrow F(j\omega)=(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega})\cdot e^{+j\omega\cdot 2}$

4.2.3 Frequenzverschiebung

Frequenzverschiebung im Bildbereich, Multiplikation mit e-Funktion im Zeitbereich	$f(t) \cdot e^{j\omega t_0} \leftarrow\rightarrow F[j(\omega - \omega_0)]$

4.2.4 Differentiationssatz und Integrationssatz

Differentiation Differentiation im Bildbereich durch Multiplikation mit $(j\omega)^n$, wobei n die n-te Ableitung angibt	$(j\omega)^n \cdot F(j\omega)$
Integration Integration im Bildbereich durch Division mit $(j\omega)$	$\frac{F(j\omega)}{j\omega}$

4.2.5 Korrespondenztabelle

Originalfunktion f(t)	Bildfunktion F(jw)	Originalfunktion f(t)	Bildfunktion F(jw)
$\delta(t)$	1	1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\,\delta(\omega-\omega_0)+\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\,\delta(\omega-\omega_0)+\frac{\pi}{j}\,\delta(\omega+\omega_0)$
$sgn(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	$s(t)$	$\pi\,\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$s(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2}\,\delta(\omega-\omega_0)+\frac{\pi}{2}\,\delta(\omega+\omega_0)$ $+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	$s(t)\cdot\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2j}\,\delta(\omega-\omega_0)+\frac{\pi}{2j}\,\delta(\omega+\omega_0)$ $+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$
$s(t)\cdot e^{-at}$	$\frac{1}{a+j\omega}$ (a > 0 bzw. Re a > 0)	$\frac{s(t)\cdot t^n\cdot e^{-at}}{n!}$ (n = 0, 1, 2, ...)	$\frac{1}{(a+j\omega)^{n+1}}$ (a > 0 bzw. Re a > 0)
$s(t)\cdot e^{-at}\cdot\cos(\omega_0 t)$	$\frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}$ (a > 0 bzw. Re a > 0)	$s(t)\cdot e^{-at}\cdot\sin(\omega_0 t)$	$\frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}$ (a > 0 bzw. Re a > 0)
$e^{-a\|t\|}$ (a > 0)	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	$e^{-a\|t\|}\cdot\cos(\omega_0 t)$ (a > 0)	$\frac{2a(\omega^2+\omega_0^2+a^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+a^2(2\omega^2+2\omega_2^2+a^2)}$
e^{-at^2} (a > 0)	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$		

5 Laplace-Transformation

5.1 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen

Bildfunktion $F(s)$	**Originalfunktion** $f(s)$	**Bildfunktion** $F(s)$	**Originalfunktion** $f(s)$
1	$\delta(t)$ (Dirac-Impuls)	$\frac{1}{s}$	$s(t)$ (Sprungfunktion)
$\frac{1}{s^2}$	t (Rampe)	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}\cdot t^2$
$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{2}{s^4}$	$\frac{1}{3}t^3$
$\frac{m!}{s^{m+1}}$	t^m	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{e^{at}-1}{a}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t\cdot e^{at}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{a\cdot e^{at}-b\cdot e^{bt}}{a-b}$
$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)\cdot e^{at}$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{e^{at}-at-1}{a^2}$
$\frac{1}{s(a-a)^2}$	$\frac{(at-1)\cdot e^{at}+1}{a^2}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\frac{1}{2}t^2\cdot e^{at}$
$\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2}at^2\right)\cdot e^{at}$	$\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2}a^2t^2+2\mathrm{at}+1\right)\cdot e^{at}$
$\frac{1}{s^n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{t^{n-1}\cdot e^{at}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin(at)}{a}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{\sin(b)\cdot s+a\cdot\cos(b)}{s^2+a^2}$	$\sin(at+b)$	$\frac{\cos(b)\cdot s-a\cdot\sin(b)}{s^2+a^2}$	$\cos(at+b)$
$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\cdot\sin(at)}{a}$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cdot\cos(at)$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\sinh\frac{(at)}{a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt}\cdot\sinh(at)}{a}$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cdot\cosh(at)$
$\frac{1}{s(s^2+4\mathrm{a}^2)}$	$\frac{\sin^2(at)}{2\mathrm{a}^2}$	$\frac{s^2+2\mathrm{a}^2}{s(s^2+4\mathrm{a}^2)}$	$\cos^2(at)$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t\cdot\sin(at)}{2\mathrm{a}}$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cdot\cos(at)$
$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$\sin\frac{(at)}{t}$		

für alle Zeitfunktionen gilt: $f(t)=0$ *für* $t<0$

5.1.1 Partialbruchzerlegung

- jede echt gebrochenrationale Funktion vom Typ $f(x)=\frac{z(x)}{n(x)}$ lässt sich in Partialbrüche zerlegen

Vorgehensweise: Reelle Nullstellen des Nennerpolynoms n(x) nach Lage und Vielfalt bestimmen	
Jeder reellen Nullstelle wird ein Partialbruch zugeordnet $A_1, A_2, \ldots A_n$ – noch unbekannte Konstanten	x_1 : einfache Nullstelle $\rightarrow \frac{A}{x-x_1}$ x_2: zweifache Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}$ x_n: n-fache Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}\cdots\frac{A_n}{(x-x_1)^n}$
Bestimmung der Konstanten	Alle Brüche auf gemeinsamen Nenner bringen (Hauptnenner) und Konstanten bestimmen. → einsetzen der Nennernullstellen liefert erste Lösungen → fehlende erhält man aus beliebigen Einsetzungen

Beispiel:	$\frac{1}{s^2\cdot(s+2)}$
Nullstellen und Partialbruch	$s_1=-2$ $s_2=0$ $\rightarrow$ $\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}$ $s_3=0$
auf Hauptnenner bringen	$\frac{A\cdot s^2+B\cdot(s+2)+C\cdot s\cdot(s+2)}{s^2+(s+2)}$
Ursprüngliche Funktion und Partialbruch gleichsetzen	$\frac{1}{s^2\cdot(s+2)}=\frac{A\cdot s^2+B\cdot(s+2)+C\cdot s\cdot(s+2)}{s^2+(s+2)}$ $\rightarrow$ $s^2+(s+2)$ kürzen $1=A\cdot s^2+B\cdot(s+2)+C\cdot s\cdot(s+2)$
Erste Nullstelle einstellen: $s_2=0$	$1=0+2\cdot B+0$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{B=\frac{1}{2}}}$
Zweite Nullstelle einsetzen $s_1=-2$	$1=4\cdot A+0+0$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{A=\frac{1}{4}}}$
Beliebigen Wert einsetzen und letzte Konstante ermitteln: $s=1$	$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot 3+C\cdot 3$ $1=\frac{7}{4}+3C$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{C=-\frac{1}{4}}}$

6 Z-Transformation

6.1 Korrespondenzen der z-Transformation

f(k)	F(z)	Konvergenzbereich
$\delta(k)$	1	ganze z-Ebene
$s(k)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$z_0^k \cdot s(k)$	$\frac{z}{z-z_0}$	$\lvert z\rvert > z_0$
$\sin(\Omega_0 k)\cdot s(k)$	$\frac{z\cdot\sin(\Omega_0)}{z^2-2z\cdot\cos(\omega_0)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos(\Omega_0 k)\cdot s(k)$	$\frac{z\cdot(z-\cos(\Omega_0))}{z^2-2z\cdot\cos(\omega_0)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$k\cdot z_0^k\cdot s(k)$ (Rampenfunktion)	$\frac{z\cdot z_0}{(z-z_0)^2}$	$\lvert z\rvert > z_0$